

CLASE 1 – MÓDULO V

En esta primera clase nos proponemos conocer la ubicación de los números irracionales dentro del conjunto de los números reales. También reconocer la necesidad de la creación de los números complejos y distintas formas de representarlos.

¿Cómo citar esta clase?

Programa Oportunid@des, Dirección de Educación de Jóvenes y Adultos, Consejo General de Educación de Entre Ríos, 2018. Matemática, Clase 1, Módulo V.

LOS NÚMEROS REALES

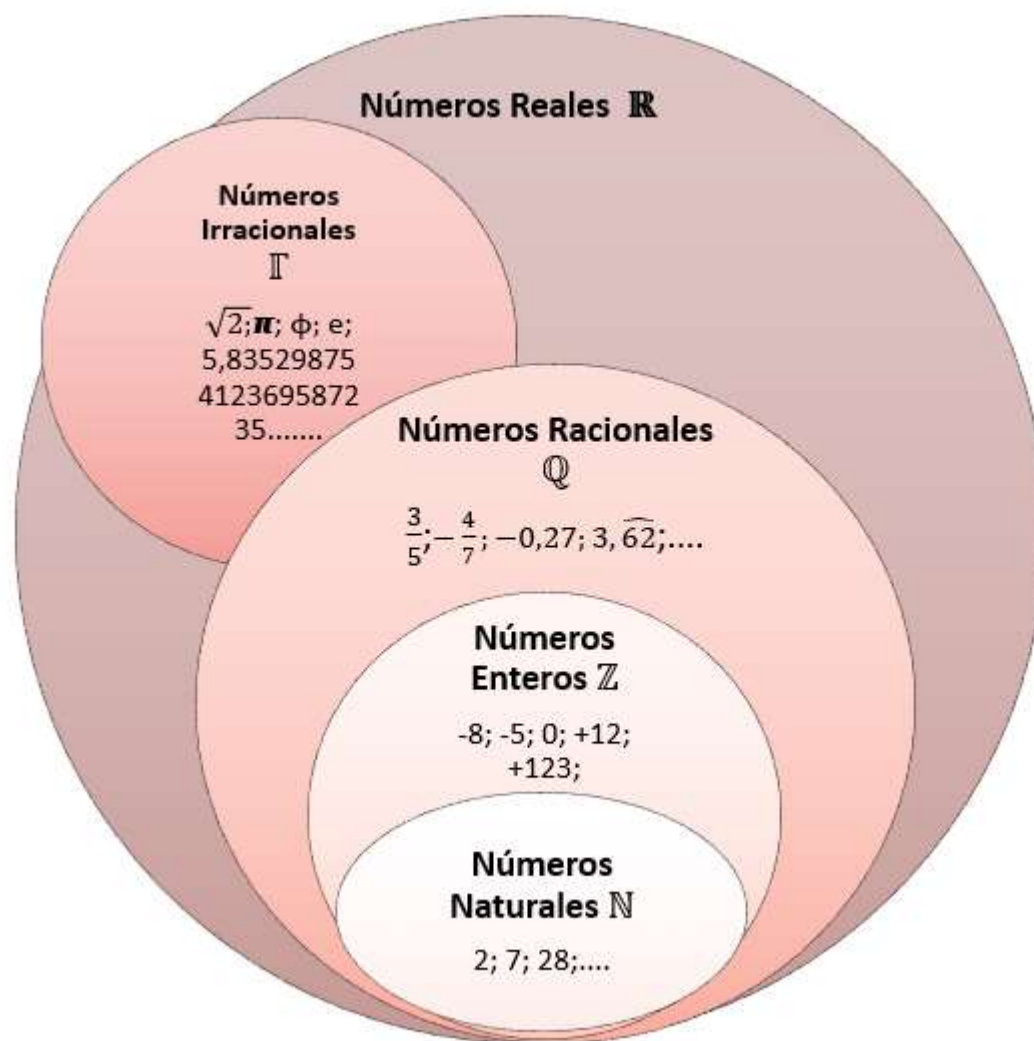


En las clases anteriores hemos trabajado con números que pertenecen a diferentes conjuntos. Ellos son: los **Números Naturales**, que dijimos sirven principalmente para contar; los **Números Enteros**, que también llamamos números relativos y son positivos o negativos en relación al cero, los **Números Racionales** que se pueden expresar de diferentes maneras ya sea como fracción o como número decimal exacto o periódico y se pueden transformar de una forma a la otra, las fracciones como decimales y los números decimales como fracciones.

Llegó el momento de conocer otros números que también son decimales, pero no se pueden transformar en fracción, por ese motivo no son racionales, y los llamamos **Números Irracionales**.

Algunos irracionales son:

$\pi = 3,14159265358979323846 \dots$	$\sqrt{2} = 1,4142135624\dots\dots$
$e = 2,718281828459045235360\dots$	$\sqrt{3} = 1,7320508076\dots\dots$
$\phi = 1,6180339887498948 \dots$	$\sqrt[3]{5} = 1,7099759467\dots\dots$

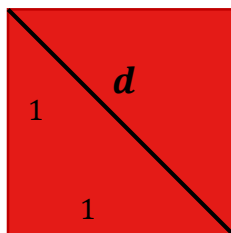


Como puedes ver en el gráfico los números Naturales están dentro del conjunto de los números Enteros y éstos a su vez dentro de los Racionales, el conjunto de los números Racionales junto a los números Irracionales forma el de los **Números Reales**.

Los números irracionales no pueden ser expresados como fracción y tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Fueron descubiertos por los seguidores de Pitágoras cuando comprobaron que no podían medir, usando la misma unidad, el lado de un cuadrado y su diagonal.

Lee con atención el siguiente ejemplo:

En el siguiente cuadrado de lado igual a 1, trazamos una diagonal d .



Queda determinado un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 1 y 1, y d es la hipotenusa. Si aplicamos el teorema de Pitágoras, podemos calcular el valor de la diagonal d .

$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d = \sqrt{1 + 1}$$

$$d = \sqrt{2}$$

Recuerda: los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos y el más largo hipotenusa.

Según el teorema de Pitágoras el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.

Si expresamos $\sqrt{2}$ como número decimal, será:

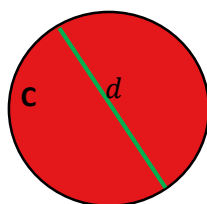
$$\sqrt{2} = 1.4142135324 \dots$$

La diagonal del cuadrado resulta un número irracional. Este número tiene infinitas cifras decimales que aparecen sin ningún orden preestablecido. (Esto alarmó a los Pitagóricos)

El valor exacto es $\sqrt{2}$, el número 1,414243524..., que obtenemos con la calculadora, es aproximado porque se descartan infinitas cifras decimales. En algunas ocasiones se trabaja con el valor aproximado y en otras se usa $\sqrt{2}$, dependiendo de la exactitud con la que se quiera trabajar.

Existen infinitos números irracionales y algunos son muy famosos:

- El número π (pi) que expresa la relación entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.



$$\pi = \frac{c}{d}$$

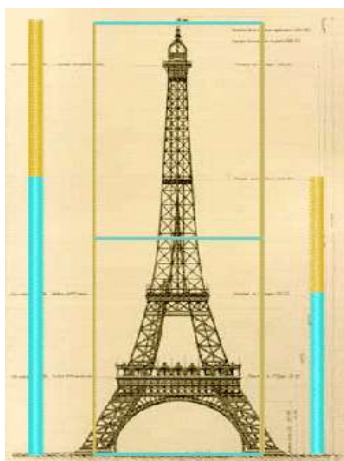
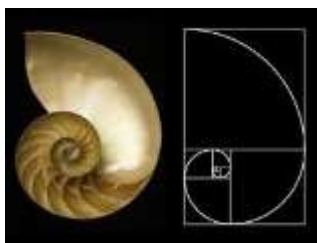
$$\pi = 3.141592536 \dots$$

El diámetro de una circunferencia está contenido en su longitud una cantidad π de veces.

- El número ϕ (phi), su valor se ha encontrado en innumerables formas de la naturaleza y ha inspirado a artistas, arquitectos y músicos de todos los tiempos.

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\phi \cong 1,6180339887 \dots$$

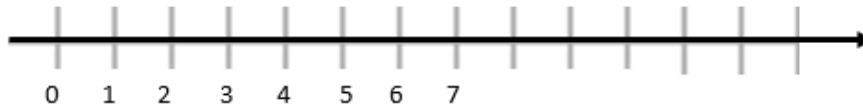


El cociente entre la parte mayor y la menor de cada segmento, o entre el largo y el ancho de una figura, es igual a ϕ .

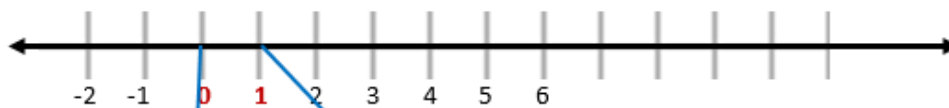
LOS IRRACIONALES EN LA RECTA NUMÉRICA

Hemos ubicado los números de los diferentes conjuntos estudiados en la recta numérica:

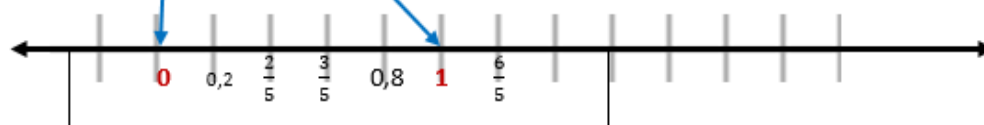
- Los números naturales



- Los números enteros

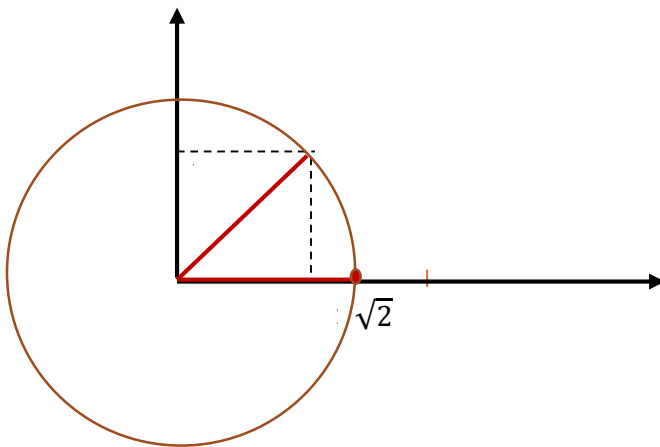


- Los números racionales



Vemos cómo entre el **0** y el **1** se ubican algunas fracciones y números decimales dividiendo la unidad en partes iguales, también podemos ubicar infinitas fracciones entre otro par de números enteros o entre un par de fracciones.

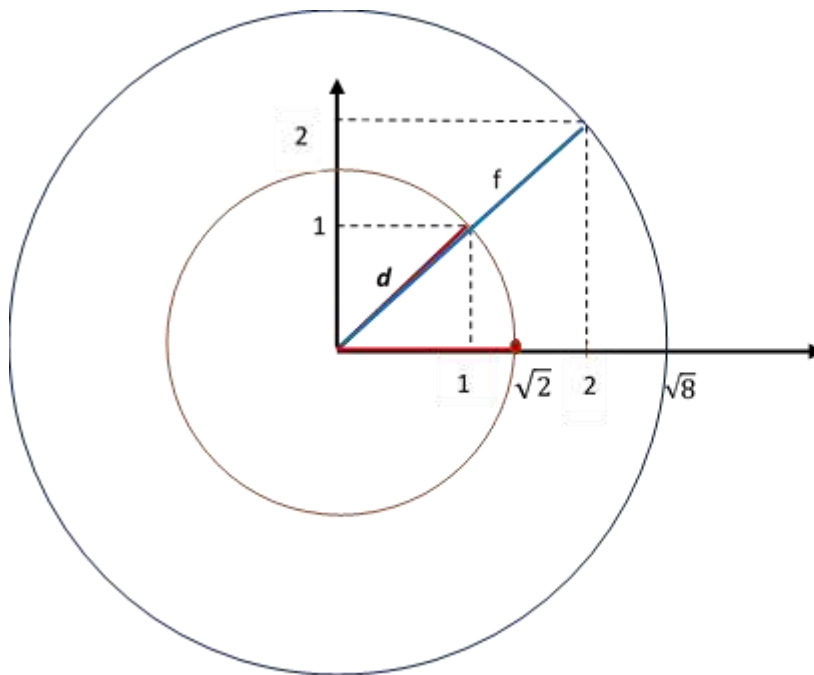
- Ubicaremos en la recta numérica algunos números irracionales, que son raíces cuadradas. En este caso, la técnica de dividir la unidad en partes iguales, no es conveniente. Recurrimos nuevamente al teorema de Pitágoras.



$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d = \sqrt{1 + 1}$$

$$d = \sqrt{2}$$



$$f^2 = 2^2 + 2^2$$

$$f = \sqrt{4 + 4}$$

$$f = \sqrt{8}$$

De esta manera completamos la recta numérica. La llamamos **Recta Real** porque en ella están ubicados todos los números reales, el cero, los números positivos y negativos, las fracciones y decimales exactos y periódicos y los irracionales. Se puede demostrar que a cada punto de la recta le corresponde un número, de modo que no sobra ningún punto ni ningún número.

Repasa lo anterior con el siguiente video. Control clic sobre la imagen.





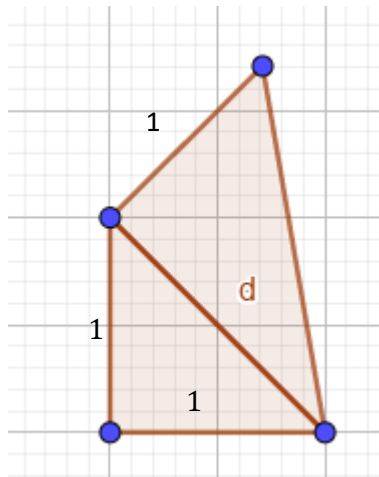
ACTIVIDAD 1 OBLIGATORIA PARA ENTREGAR AL TUTOR

1. Halla con calculadora los valores aproximados de las siguientes raíces:

- a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{7}$ c) $\sqrt[4]{3}$ d) $\sqrt[5]{11}$ e) $\sqrt[4]{81}$

2. Si la hipotenusa del triángulo rectángulo más pequeño, cuyos catetos miden 1cm cada uno, es $d = \sqrt{2}$, determina:

a. la medida exacta de la hipotenusa del otro triángulo rectángulo:

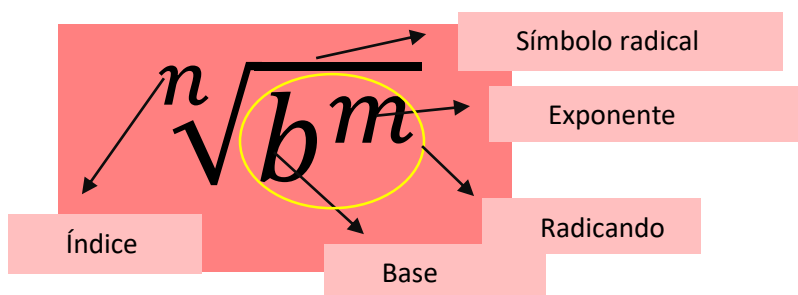


b. Sigue dibujando triángulos a continuación para obtener $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$

RADICALES

En esta semana nos dedicaremos a realizar operaciones con números irracionales, en especial con radicales.

Para ello vamos a conocer algunos nombres:



Completa el siguiente cuadro para familiarizarte con las nuevas palabras:

Radical	índice	base	exponente	radicando
$\sqrt{7^3}$				
	5	3	8	
	3			2^5
$\sqrt[3]{5^7}$				

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

PROPIEDAD DISTRIBUTIVA

Si dentro de una raíz hay una multiplicación o una división se pueden resolver de dos maneras distintas y obtener el mismo resultado:

$$\sqrt{16 \cdot 9}$$

$$\sqrt{144}$$

$$12$$



Resuelve primero la multiplicación y luego calcula la raíz cuadrada.

$$\sqrt{16 \cdot 9}$$

$$\sqrt{16} \cdot \sqrt{9}$$

$$4 \cdot 3 = 12$$



Resuelve primero las raíces y luego calcula la multiplicación.

$$\sqrt{100:4}$$

$$\sqrt{25}$$

$$5$$



Resuelve primero la división
y luego calcula la raíz
cuadrada.

$$\sqrt{100:4}$$

$$\sqrt{100}:\sqrt{4}$$

$$10:2=5$$



Resuelve primero las raíces
y luego calcula la división.

Cuando aparecen operaciones de este tipo podemos elegir de
qué manera resolver según nos convenga.

Control clic sobre la imagen para repasar el tema con este video:



$$\sqrt[6]{2^9} = \sqrt[6:3]{2^{9:3}} = \sqrt{2^3}$$

SIMPLIFICACIÓN DE ÍNDICES Y EXPONENTES

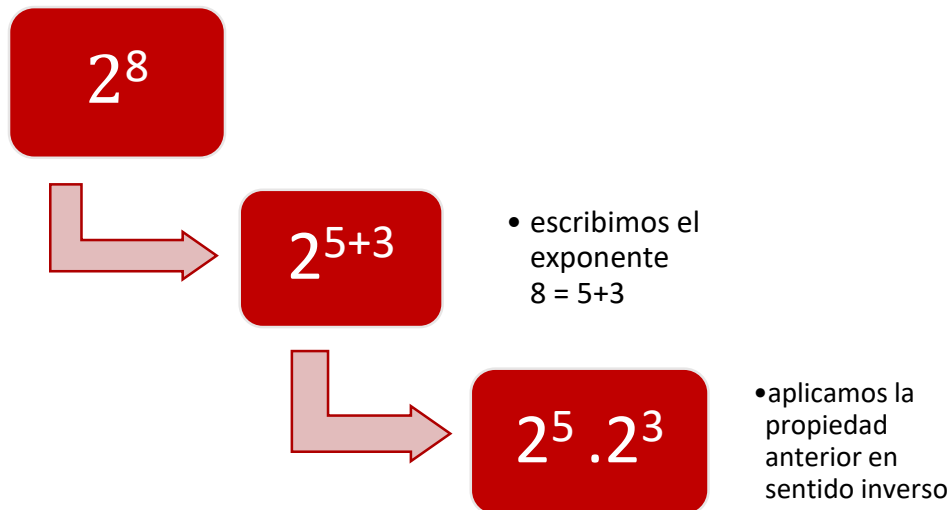
El exponente y el índice de un radical se pueden dividir por un mismo número y se obtiene una expresión equivalente.

Recordemos una propiedad de la potenciación:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ Cuando se multiplican dos o más potencias de la misma base se pueden reemplazar por otra potencia de igual base sumando los exponentes.

EXTRACCIÓN DE FACTORES DEL RADICAL

Si vemos esta propiedad de otra manera:



Ahora, aplicamos estas propiedades para obtener expresiones con radicales más sencillas.

Ejemplos:

- $\sqrt[6]{81}$

81	3
27	3
9	3
3	3
1	$81 = 3^4$

$\sqrt[6]{81} = \sqrt[6]{3^4}$		Se factora el radicando.
$\sqrt[6:2]{3^{4:2}} = \sqrt[3]{3^2}$		Se dividen por 2 índice y exponente.

• $\sqrt{400}$

400	2
200	2
100	2
50	2
25	5
5	5
1	400 = $2^4 \cdot 5^2$

$$\begin{aligned}\sqrt{400} &= \sqrt{5^2 \cdot 2^4} \\ &= \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2^4} \\ &= \sqrt{5^{2:2}} \cdot \sqrt{2^{4:2}} \\ &= 5 \cdot 2^2 \\ &= 5 \cdot 4 = 20\end{aligned}$$

Se factora el radicando.

Se dividen por 2 índice y exponente.

• $\sqrt{288}$

288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3
1	288 = $2^5 \cdot 3^2$

$$\begin{aligned}\sqrt{288} &= \sqrt{2^5 \cdot 3^2} \\ &= \sqrt{2^5} \cdot \sqrt{3^2} \\ &= \sqrt{2^{2+2+1}} \cdot \sqrt{3^2} \\ &= \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3^2} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{2}\end{aligned}$$

• Factorar el radicando.

• Aplicar propiedad distributiva.

• Expresar $5 = 2+2+1$

• Aplicar propiedad distributiva.

• Simplificar índices y exponentes.

A

ACTIVIDAD 2 OBLIGATORIA PARA ENTREGAR AL TUTOR

1. Halla una expresión equivalente a las siguientes raíces aplicando las propiedades de la potenciación y radicación.

a) $\sqrt{3375}=$

b) $\sqrt[3]{2744}=$

c) $\sqrt{864}=$

d) $\sqrt[5]{800}=$

NÚMEROS IMAGINARIOS Y COMPLEJOS



Como en la mayoría de los casos en que los matemáticos comenzaron a usar otro tipo de números, aquí también ocurrió porque se presentaba una situación que no se podía resolver con los que se conocían hasta el momento. Así fue que en el año 1545, el matemático italiano, Girolamo Cardano (1501-1576), propone el uso de los números complejos en un tratado sobre la solución de las ecuaciones cúbicas y cuadráticas.

El problema que se presentaba era encontrar un número que elevado al cuadrado tuviera resultado negativo.

Sabemos que todos los números reales elevados a una potencia de exponente par dan resultado

Ese número no estaba en el conjunto de los números reales, había que “inventarlo”.

Es así que se propone:

$$i^2 = -1$$

De esta manera se puede encontrar solución a raíces cuadradas de números negativos, lo que no se puede hacer en el conjunto de los números reales, como las siguientes:

$$\sqrt{-1} = \pm i$$

$$\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$\sqrt{-9} = \pm 3i$$

Las combinaciones de un número real y un número imaginario, dieron lugar al conjunto de los **Números Complejos**, $\mathbb{C}$

Los Números Complejos tienen una parte real y otra imaginaria.

Se pueden expresar de diferentes maneras, aunque existen otras, en este curso solo veremos las siguientes:

PAR ORDENADO (a; b)

a es la componente real y b, la imaginaria

EN FORMA BINÓMICA: a+bi

a es el término real y bi, el imaginario

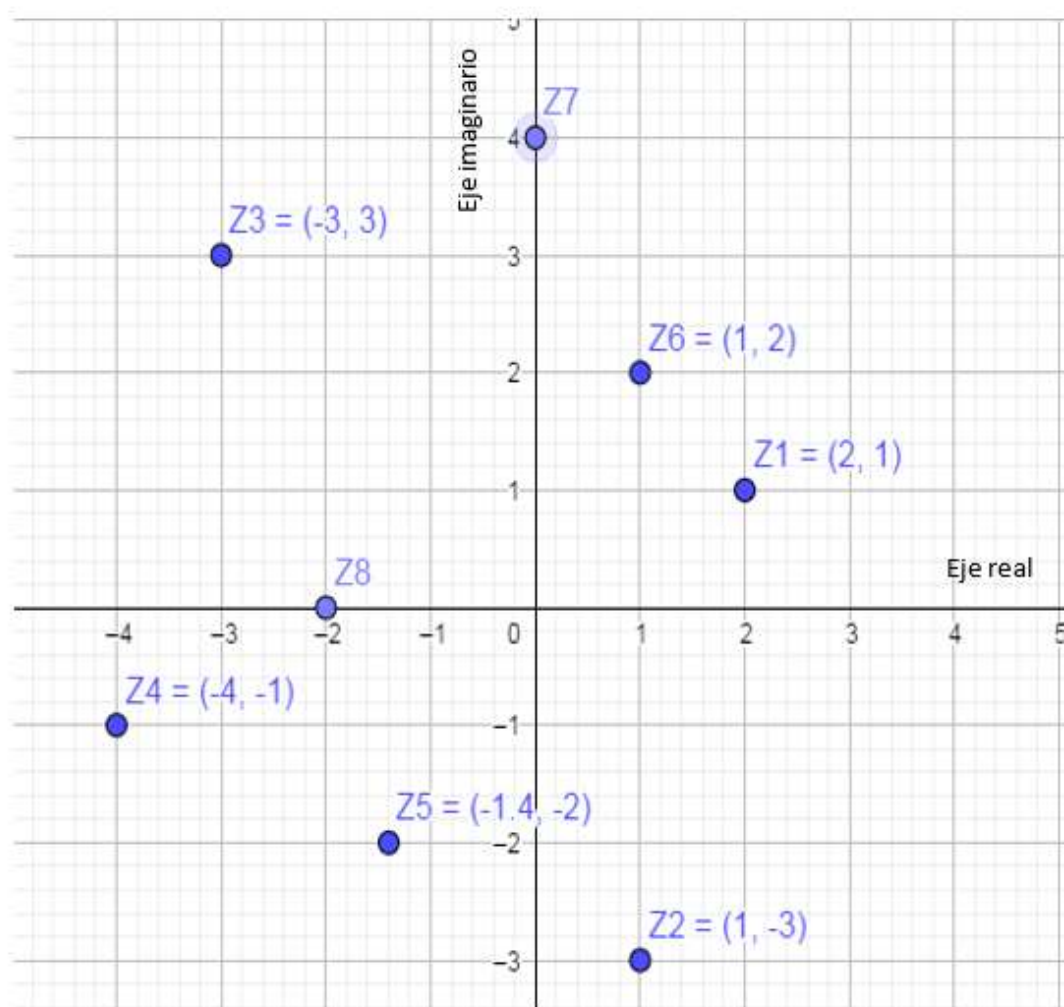
Ejemplos:

Parte real	Parte imaginaria	Forma binómica	Par ordenado
5	-3	$5 - 3i$	(5; -3)
-4	8	$-4 + 8i$	(-4; 8)

También había que resolver la forma de representarlos gráficamente ya que la recta real está completa con los números reales. Y por supuesto que le encontraron solución: usaron una recta vertical, en ella ubicaron los números imaginarios, en referencia al cero, hacia arriba los imaginarios positivos y hacia abajo, los negativos.

Los números complejos se representan en un plano en el que se toman como referencia un eje horizontal donde se representan las componentes reales y un eje vertical para las componentes imaginarias. Ambos ejes se cortan en el punto cero, y son perpendiculares entre sí.

Habitualmente se usa la letra Z acompañada por un número natural, para identificarlos.





ACTIVIDAD 3 OBLIGATORIA PARA ENTREGAR AL TUTOR

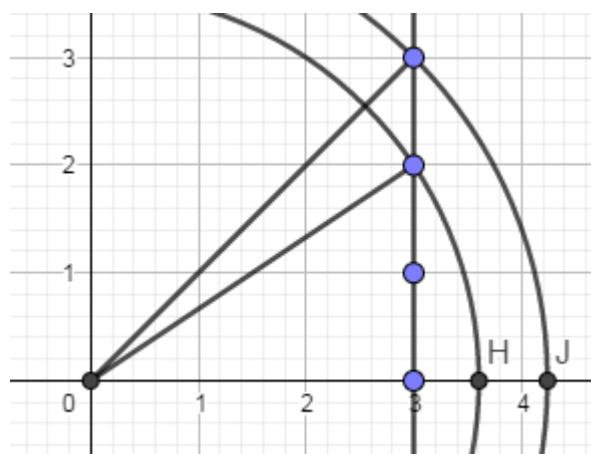
Completa la tabla para cada número complejo del gráfico anterior.

Número complejo	Par ordenado	Forma binómica	Parte real	Parte imaginaria
z_1	$(2; 1)$	$2 + 1i = 2 + i$	2	1
z_2				
z_3				
z_4				
z_5				
z_6				
z_7	$(0; 4)$	$0 + 4i = 4i$	0	4
z_8				



ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

1. ¿Qué número representa el punto H? ¿Y el J?



2. Indica cuáles de los siguientes números son irracionales.

3,41	3,41424344....	$\sqrt{5}$
$\sqrt{11}$	$\sqrt{36}$	$\sqrt{37}$
$\sqrt[3]{8}$	3,222222....	0,123123123...

3. Expresa en forma binómica o como par ordenado, según corresponda, los siguientes números complejos:

a) $2+5i=$	b) $-5+3i=$	c) $-2i=$
d) $(-4;3)=$	e) $(1; 0)=$	f) $(3;-2)=$

4. Representa los números complejos del ejercicio 3 en forma gráfica:

BIBLIOGRAFÍA

- Altman, Silvia y otros. Iniciación al álgebra y al estudio de funciones 2. Tinta Fresca. Buenos Aires 2012.
- Bocco, Mónica. Funciones elementales para construir modelos matemáticos. Ministerio de educación. Buenos aires. 2010.
- Kaczor, Pablo y otros. Matemática I. Santillana. Polimodal. Buenos Aires. 2007.
- Laurito, Liliana y otros. Matemática Activa 9. Puerto de Palos. Buenos Aires 2001.
- Mérega, Herminia. Actividades de Matemática 9. Santillana. Buenos Aires. 2007.