CLASE 2 – MÓDULO I

¡Bienvenidos!

En esta segunda clase nos proponemos aprender los conceptos de múltiplos y divisores, identificar números primos y compuestos, conocer los criterios de divisibilidad, aprender los procedimientos para el cálculo del MCM y DCM y conocer la técnica del diagrama de árbol, utilizando todos estos como herramientas para resolver problemas.

¿Cómo citar esta clase?

Programa Oportunid@des, Dirección de Educación de Jóvenes y Adultos, Consejo General de Educación de Entre Ríos, 2018. Matemática, Clase 2, Módulo I.

SEMANA 1

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

MÚLTIPLOS

En una rotisería, elaboran empanadas salteñas y empacan diariamente bandejas con 4 empanadas. Durante la semana la cantidad de bandejas varía entre 10 y 25 dependiendo de la demanda. ¿Qué cantidad de empanadas pueden empacar por día?

Y así podemos hacer una lista para la cantidad de empanadas: 40, 44, 48, 52, 56, 60, 64, …

Los números de la lista son múltiplos de 4.

Un múltiplo de 4 es el resultado de multiplicar cualquier número por cuatro.

Se dice que un número es múltiplo de otro cuando es el resultado de multiplicar este último por cualquier número natural.

Así por ejemplo 45 es múltiplo de 5 porque es el resultado de multiplicar 5 por el número 9.

21 es múltiplo de 7, porque resulta de multiplicar ese número por 3.

La cantidad de múltiplos de un número es infinita.

DIVISORES

Escribamos todos los números por los que se puede dividir el número 24:

24:1=24

24:2=12

24:3= 8

24:4=6

24:5= no es exacto, da un número con coma

24:6=4

24:7= no es exacto

24:8=3

24: 12=2

24:24=1

El número 24 se puede dividir por 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 y la división es exacta. Por eso decimos que 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24 son divisores de 24.

Un número natural b , distinto de cero, es divisor de otro número natural a cuando la división $a : b$ es exacta.

La cantidad de divisores de un número es limitada.

También podemos usar expresiones que tienen el mismo significado:

Si la división $a\colon b$, con b distinto de cero, es exacta "a es divisible por b" o "a es múltiplo de b" o "b es divisor de a".

CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Si quisiéramos saber cuáles son los divisores de 324 y tendríamos que probar con todos los números, el trabajo sería demasiado aburrido. Para obtenerlos más rápidamente usamos los **Criterios de Divisibilidad.**

Son reglas que permiten saber cuándo un número es divisible por otro sin necesidad de hacer la división.

un número es divisible por	• cuando:
2	• es un número par
3	• la suma de sus cifras es un 3, 6 ó 9
4	• las dos últimas cifras forman un número múltiplo de4
5	• la cifra de las unidades es 5 ó 0
6	• es divisible por 2 y por 3
8	• las tres últimas cifras forman un número múltiplo de 8
9	• la suma de sus cifras es múltiplo de 9
10	• la cifra de las unidades es 0

Veamos por cuáles números es divisible 324:

- es divisible por 2 porque es un número par
- es divisible por 3 porque la suma de sus cifras 3+2+4=9

- es divisible por 4 porque las dos últimas cifras forman el 24 y 24:4 es exacto.
- no es divisible por 5 porque la cifra de las unidades no es 0 ni 5.
- Es divisible por 6 porque es divisible por 2 y por 3.
- No es divisible por 8 porque 324:8 no es exacto.
- Es divisible por 9 porque la suma de sus cifras es 9.
- No es divisible por 10 porque no termina en cero.

Actividad 1 obligatoria para entregar al tutor

1) Escribe todos los múltiplos de:

   a) 9 comprendidos entre 50 y 120.

   b) 15 mayores que 25 y menores que 150

2) Escribe todos los divisores de los siguientes números:

   a) 7
   b) 50
   c) 12
   d) 30
   e) 66

3) Cuáles de los siguientes números son:

a) ¿Divisores de 40?

20 8 16 12 80 1

b) ¿Múltiplos de 3?

32 27 0 1 36 23

c) ¿Divisibles por 100?

20 30 2000 40 500 0

4) Sin resolverlas, indica cuáles de las siguientes divisiones son exactas y explica cómo lo decidiste:

a) 4567:3	b) 375:5	c) 1224:6
d) 2440:10	e) 5324:4	f) 867:3

5) En una reunión entre amigos en la residencia de estudiantes de Concordia que está en Paraná, decidieron comprar 8 tartas para la cena, cortaron las tartas en 6 porciones y alcanzó para que todos comieran la misma cantidad de porciones y no sobró nada.

a) ¿Puede ser que hayan ido a la reunión 18 personas? ¿Y 12 personas?
b) ¿Cuántas personas pueden haber estado presentes?
c) ¿Puede ser que cada persona haya comido 5 porciones de tarta? ¿Por qué?

SEMANA 2

NÚMEROS PRIMOS

Siento que es necesario comenzar esta clase recordando al querido Profesor entrerriano Juan Carlos Canavelli, quien en su libro Aritmética en la era digital, nos dice: “Todos conocemos los códigos de barras que caracterizan a los distintos productos comerciales, el ISBN de los libros, la fidelidad que se alcanza en la telefonía, o las magníficas fotos que envían los equipos que exploran el espacio. Todas estas realizaciones se fundamentan en la disciplina llamada Codificación, cuyas bases están en la Aritmética y en el Algebra (en el sentido del Algebra Moderna, con sus estructuras interpretadas concretamente). Análogamente hemos oído hablar del comercio electrónico, de la ley de firma digital, del cifrado de mensajes, clave pública, realizaciones todas que se integran en la Criptografía.”

“Se siente una profunda emoción cuando se piensa que detrás de estos logros de la moderna tecnología está el pensamiento y la obra del griego Euclides (Siglo III antes de Cristo), el francés Fermat (1601-1665), del suizo Euler (1707-1783) y del alemán Gauss (1777-1855), y otros matemáticos…”

Los números primos, que han sido objeto de estudio durante mucho tiempo, Se tiene información de ellos desde 300 años a.C. Existen infinitos números primos y aunque hace algunos siglos que los matemáticos buscan una fórmula que permita calcularlos, aún no lo han logrado, siendo esto un importante desafío.

Los **números primos** tienen aplicaciones concretas en la tecnología digital. Revisten gran importancia en el uso de las tarjetas de crédito, las telecomunicaciones y la seguridad. Claves secretas que nos permiten hacer compras por internet sin que alguien pueda interceptar, comunicar datos de alta confidencialidad entre bancos, transmitir información desde satélites, se pueden realizar gracias a algoritmos matemáticos que utilizan números primos.

Los números primos también son los números que multiplicados entre sí, combinándolos de distintas maneras nos permiten obtener a los otros números que llamamos **números compuestos.**

Un número natural es primo cuando tiene solamente dos divisores, el 1 y él mismo.

Por ejemplo:

- El número 3 se puede dividir solamente por 1 y por 3, por eso decimos que 3 es un número primo.

Los números primos menores que 100 son:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 y 97.

Están en negro en la siguiente tabla:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Los números escritos en blanco no son primos.

Por ejemplo:

- El número 8 se puede dividir por 1, por 2, por 4 y por 8, entonces no es primo.

Si un número tiene otros divisores además del 1 y si mismo estamos hablando de un número compuesto.

DESCOMPOSICIÓN DE UN NÚMERO COMPUESTO EN SUS FACTORES PRIMOS

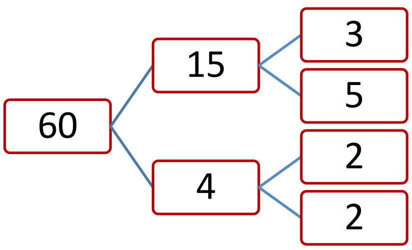
Un número compuesto, por ejemplo, el 60 se puede descomponer en el producto de sus factores primos. Para ello debemos encontrar los números primos por los cuales se puede dividir.

El 60 se puede dividir por los siguientes números primos:

- por 2 porque es par.
- por 3 porque la suma de sus cifras es 6.
- Y por 5 porque la cifra de las unidades es cero.
  Se puede dividir por otros números como 4, 10, 12, entre otros, pero no son primos.
- Podemos comenzar dividiendo el 60 por cualquiera de los números primos, 2, 3 o 5, y siempre obtendremos la misma descomposición en factores primos.

  Control clic sobre la imagen para ver el video que muestra el procedimiento para la factorización del número 60.

De otra manera:



$$60 = 3 \times 5 \times 2^2$$

Expresamos el número como el producto de dos factores distintos de 1. A cada uno de estos los volvemos a expresar como el producto de otros dos factores distintos de uno. El proceso termina cuando en todas las ramas hay solo números primos.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO Y MÁXIMO COMÚN DIVISOR

En muchas ocasiones debemos repartir cosas, hacer paquetes con mercadería en un negocio, cortar materiales de distintas medidas teniendo el menor desperdicio posible, administrar medicamentos a un enfermo y numerosas situaciones que muchas veces resolvemos por prueba y error pero que aplicando algunos procedimientos matemáticos podemos confiar en que encontraremos la mejor solución.

Estos procedimientos consisten en hallar el mínimo común múltiplo (MCM) y el máximo común divisor (MCD).

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO MCM

El siguiente problema te ayudará a comprender la idea de MCM

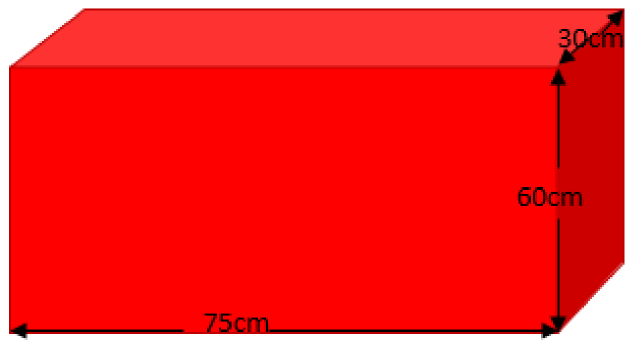
Control click para seguir el vínculo.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR MCD

Otra situación para pensar juntos:

En una carpintería reciben el pedido de cortar cubos iguales de un bloque de madera de 75cm de largo, 60cm de ancho, y 30cm de alto. La máquina con la que cuentan puede tomar las medidas en centímetros. ¿Cuál es el menor número de cubos que se pueden cortar sin desperdiciar madera? ¿Qué longitud tienen sus aristas?

El bloque de madera se puede representar de este modo:



Y este cubo como cada uno de los que se quiere cortar:

Un operario propone cortar cubos de 30cm de arista, pero otro dice que se desaprovecha gran parte de la madera y decide averiguar, qué dimensiones pueden tener los cubos que van a cortar.

Busca, entonces, los divisores de 75, 60 y 30 que son las dimensiones del bloque a cortar.

Divisores de 75 = 1, 3, 5, 15, 25, 75

Divisores de 60 = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60

Divisores de 30 = 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30

Como vemos los divisores que se repiten en los tres casos son: 1, 3, 5, 15 y los llamamos ***divisores comunes.*** Usando cualquiera de estos valores como medida de las aristas no se desperdiciará madera, pero como pide el menor número de cubos, tendrán que cortarlos usando la medida más grande, es decir 15 cm. Este es el ***máximo común divisor*** y lo escribimos en forma abreviada:

MCD (75, 60 30) = 15

Respondamos a las preguntas del problema:

¿Qué longitud tienen sus aristas?

Las aristas del cubo medirán 15 cm

¿Cuál es el menor número de cubos que se pueden cortar sin desperdiciar madera?

Si las aristas del cubo miden 15 cm, veamos cómo acomodamos los cubos en el bloque de madera:

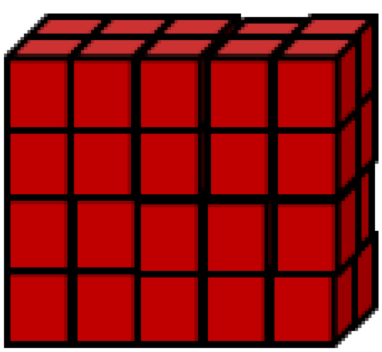
Dividimos $75cm : 15cm = 5$ sobre estas aristas del bloque podemos cortar 5 cubos.

Dividimos $60cm : 15cm = 4$ sobre estas aristas del bloque podemos cortar 4 cubos.

Dividimos $30cm : 15cm = 2$ sobre estas aristas del bloque podemos cortar 2 cubos.

En total tendremos: $5 \times 4 \times 2 = 40\ cubos$

Se pueden cortar como mínimo 40 cubos sin desperdiciar madera.



REGLAS PRÁCTICAS PARA HALLAR EL MCM Y EL MCD

En algunas ocasiones ocurre que este método de escribir una lista de los divisores o de los múltiplos no es efectivo, sobre todo si se trata de números más grandes. En estos casos usamos las siguientes reglas:

> Para hallar el MCM (Mínimo Común Múltiplo) entre dos o más números, debemos descomponerlos en sus factores primos y multiplicar los factores comunes con el mayor exponente por los no comunes.

Ejemplo: Hallar el MCM entre los números 60, 40 y 150.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$60 = 2^2.3.5$

40	2
20	2
10	2
5	5
1	

$40 = 2^3.5$

150	2
75	3
25	5
5	5
1	

$150 = 2.3.5^2$

Como vemos los factores 2 y 5 se repiten en las tres descomposiciones, son los **factores comunes**, y el factor 3 que no está en todos es un **factor no común.**

Siguiendo la regla debemos elegir 2^3 y5^2 , que son los factores comunes con mayor exponente, y el factor 3, que es no común, y multiplicar todos.

Luego será: $\mathrm{MCM}(60,40,150) = 2^3.5^2.3$=600

Para hallar el MCD (Máximo Común Divisor) entre dos o más números, debemos descomponerlos en sus factores primos y multiplicar los factores comunes con el menor exponente.

Usemos los números del ejemplo anterior (60, 40, 150), tomemos sus factores comunes, pero ahora con el menor exponente, es decir: 2 y 5 que tienen exponente 1 en la factorización y calculemos la multiplicación.

El MCD (60, 40, 150) = 5.2 = 10

Si no hay factores comunes se dice que los números dados son coprimos.

ACTIVIDAD 2 OBLIGATORIA PARA ENTREGAR AL TUTOR

1) Halla la descomposición en factores primos de los siguientes números:

a)

120	

b)

210	

c)

297	

120= 210= 297=

2) Halla el MCM y el MCD en cada caso:

a) 36, 45, 63 b) 20, 80, 240

3) Resuelve los siguientes problemas:

a) Juliana es artesana y está diseñando collares con cuentas de colores tiene un paquete con 18 cuentas rojas, otro con 27 cuentas blancas y un tercero con 45 cuentas amarillas.

Si quiere hacer collares con igual cantidad de cuentas y que las que formen cada collar sean del mismo color, ¿cuántas cuentas puede poner en cada collar? Si quiere que cada collar tenga la mayor cantidad posible de cuentas iguales, ¿cuántos collares puede hacer de cada color?

b) Un youtuber, sube videos a internet cada 2 días, otro lo hace cada 4 días y un tercero, cada 3 días. Analía los sigue a los tres y no se pierde ningún estreno. Si el 1 de abril los tres yotubers subieron un vídeo, ¿en qué días de ese mes Analía volverá a ver los tres estrenos?

SEMANA 3

COMBINATORIA

Entre el 14 de junio y el 15 de julio de 2018 se jugó El Campeonato Mundial de Fútbol Rusia. Una vez realizado el sorteo se confeccionó el fixture. En este momento empezaron las especulaciones, qué pasaría con cada grupo, y qué equipo pasaría a la siguiente instancia.

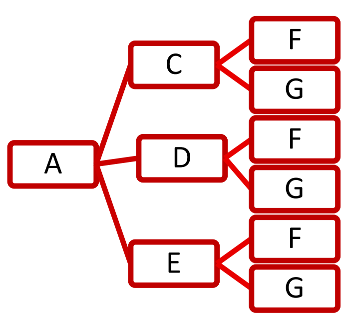
Todas las posibles alternativas se pudieron determinar usando procedimientos de Combinatoria.

La **Combinatoria** es la parte de las Matemática que se dedica a buscar procedimientos y estrategias para el recuento de los elementos de un conjunto o la forma de agrupar esos elementos.

Analicemos juntos esta situación para conocer algunos procedimientos que utiliza la Combinatoria.

Jorge almuerza todos los días en el comedor estudiantil de la facultad, donde puede elegir entre dos tipos de entrada, tres platos principales y dos tipos de postres.

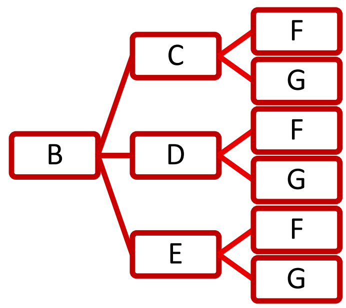
Llamaremos A y B a las dos entradas respectivamente. C; D y E a los platos principales y F y G a los postres.



Si elige la opción A para la entrada, tiene tres formas de elegir el plato principal y por cada plato principal, dos maneras para elegir el postre. Es decir, las combinaciones le permiten elegir 6 menús distintos.

Estos son: (ACF) (ACG) (ADF) (ADG) (AEF) (AEG)

Lo mismo ocurre si elige la entrada B.



Obtenemos otros seis menús distintos: (BCF) (BCG) (BDF) (BDG) (BEF) (BEG)

En total existen 12 menús distintos.

El gráfico permite contar los menús y además conocer todas las opciones.

Si solamente queremos saber cuántas opciones tenemos, es suficiente hacer el siguiente cálculo:

2	3	2	12
entradas	platos principlales	postres	combinaciones

Multiplicando 2 x 3 x 2 = 12

ACTIVIDAD 3 OBLIGATORIA PARA ENTREGAR AL TUTOR

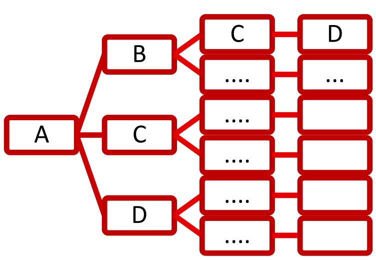
Resuelve los siguientes problemas:

1) La clave "pin" que usamos en el banco está formada por cuatro dígitos que se pueden repetir, elegidos entre los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ¿Cuántas claves distintas se pueden escribir?

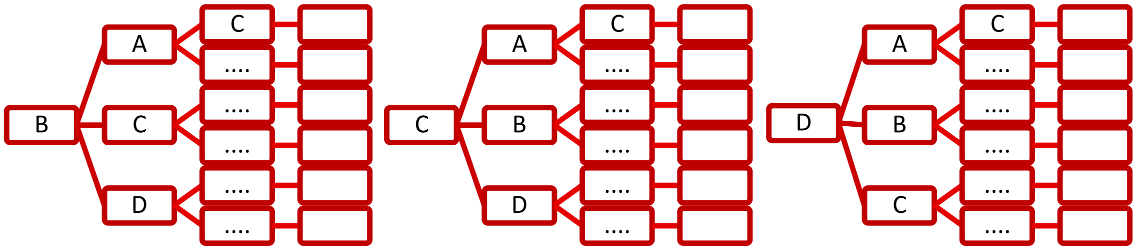
Coloca en cada casillero la cantidad de opciones para cada cifra y luego multiplica los cuatro valores. El número obtenido es la cantidad de claves distintas que se pueden escribir.

2) Cuatro amigos, Andrés, Braulio, Cristian y Diego fueron a ver un partido de Patronato y River y se quieren tomar una fotografía parados uno al lado del otro. ¿Cuántas fotos pueden sacarse de modo que siempre estén ubicados de distinta manera?

Completa el diagrama de árbol, suponiendo que Andrés ocupa el primer lugar.



Construye el diagrama de árbol para los casos en que Braulio, o Cristian, o Diego ocupen el primer lugar. Cuenta la cantidad de maneras distintas en que pueden ubicarse.



Otra manera de conocer la cantidad de combinaciones es la siguiente:

Coloca en el primer casillero la cantidad de personas que pueden ubicarse en el primer lugar. Si ya está completo ese lugar, ¿cuántas personas pueden ocupar el segundo? ¿Y el tercero? ¿Y el cuarto? Una vez completos los casilleros, multiplica los valores. El número obtenido coincide con la cantidad de opciones que se formaron en el diagrama de árbol.

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

Resuelve los siguientes problemas, teniendo en cuenta los pasos que vimos en la clase anterior. No te olvides de escribir la respuesta de cada problema como oración.

1) Como los sábados por la noche y los domingos a la tarde va mucha gente a la plaza del pueblo y queda en muy malas condiciones porque no hay donde tirar la basura, los chicos de la escuela San Martín, le propusieron al intendente colocar cestos de basura para residuos orgánicos e inorgánicos en todo su perímetro a igual distancia uno del otro. La plaza tiene 120m de largo y 96m de ancho. ¿Cada cuántos metros deben colocarse los cestos si se quiere colocar la menor cantidad posible? ¿cuántos cestos de cada clase son necesarios? Realiza un esquema para ayudarte. Cuidado con las esquinas.

2) En el club están organizando un espectáculo de baile para recaudar fondos para que el equipo de softbol pueda viajar a un torneo en Mendoza. Se presentan tres grupos, uno que baila flamenco, otro con un número de murga y el tercero con tango. Los integrantes de la comisión están pensando en qué orden se pueden presentar.

   a) Calcula cuántas maneras distintas se pueden presentar los tres bailes.

   b) Realiza un diagrama de árbol colocando las iniciales de cada baile para obtener todas las posibles combinaciones.

3) En dos meses se realizará la maratón anual en la costanera de la ciudad y tres amigos están entrenando una plaza. Julio da una da vuelta caminando. Laura trotando y Mariano corriendo. El primero tarda 10 minutos en dar una vuelta, la segunda tarda 6 minutos y el tercero, 2 minutos. Si comenzaron a la misma hora y en el mismo lugar ¿cada cuánto tiempo se vuelven a encontrar el punto de partida?

Para la fiesta de cumpleaños de su hijo Adriana preparó 8 tartas iguales a la dibujada. Pensando en que alcance para que todos coman la misma cantidad de porciones y no sobre ni una porción.

4) Responde a estas preguntas:

¿Puede ser que haya habido 18 personas en la fiesta?

¿Cuántas personas pueden haber estado presentes en la fiesta?

¿Puede ser que cada persona haya comido 5 porciones de tarta?

BIBLIOGRAFÍA

- Altman, Silvia y otros, Matemática. Números y operaciones 2. Tinta Fresca. Buenos aires. 2011.
- Amenedo, Mariana y otros. Matemática 1. Santillana Secundaria. Buenos Aires 1997.
- Berio, Adriana y otros. Matemática 7 En estudio. Puerto de Palos. Buenos Aires.2005.
- Canavelli, Juan Carlos. Aritmética en la era digital. RRR ediciones. Paraná. 2011
- Dickenstein, Alicia. Mate MAX. Libros del Quirquincho. Buenos Aires 1994.
- Páginas web citadas en el texto.
- Fioritti, Gema y otros. Matemática 1 Enseñanza Secundaria. Editorial SM. Buenos Aires 2014.
- Fuxman Bass, Juan Ignacio. Resolviendo: problemas de matemáticas. Red Olímpica. Buenos Aires 2010.
- Vizcaíno, Adriana. Aritmética. Ministerio de Educación de la Nación. Buenos Aires 2011.