CLASE 4 – MÓDULO IV

En esta clase nos proponemos conocer las ecuaciones cuadráticas y la manera de resolverlas, identificar los elementos de la gráfica de la función cuadrática, determinar su dominio e imagen y relacionar la gráfica con las raíces de su ecuación.

¿Cómo citar esta clase?

Programa Oportunid@des, Dirección de Educación de Jóvenes y Adultos, Consejo General de Educación de Entre Ríos, 2018. Matemática, Clase 4, Módulo IV.

Dirección de EDUCACIÓN DE JÓVENES Y ADULTOS
Consejo General de Educación
Gobierno de Entre Ríos

Programa OPORTUNIDADES
ACCESO DIGITAL a la EDUCACIÓN SECUNDARIA

SEMANA 1

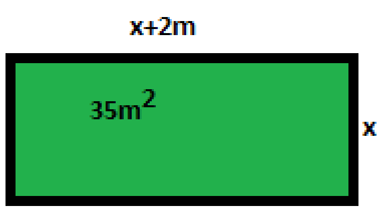
ECUACIONES CUADRÁTICAS

Analicemos este problema:

Adrián se dedica a la parquización de terrenos y le encargaron diseñar un jardín en un terreno rectangular. Sabe que el área del terreno es de $35m^2$ y que el largo es 2m mayor que el ancho. Necesita determinar las longitudes de los lados.

Veamos cómo podemos proceder para resolver el problema de Adrián:

Como no conocemos el ancho, lo llamamos x, y además sabemos que el largo tiene 2m más que el ancho, es decir x + 2m



Recordemos que para calcular el área de un rectángulo se multiplican la base (el largo) por la altura (el ancho).

$$Area\ del\ rectángulo = base\ \times altura$$

$$base = x + 2m$$

$$altura = x$$

$$(x + 2).x = 35$$

$$aplicamos\ propiedad\ distributiva\ y\ resulta:$$

$$x^2 + 2x = 35$$

En esta ecuación la incógnita está elevada al cuadrado, cuando esto ocurre decimos la ecuación se llama cuadrática o de segundo grado.

Para resolver este tipo de ecuaciones usaremos una fórmula, la fórmula resolvente, así se llama.

Consideremos una ecuación de segundo grado expresada en forma general, sus coeficientes son las letras $a, b\ y\ c$.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Como es de segundo grado tendrá dos soluciones, $x_1\ y\ x_2$, que se calculan del siguiente modo:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

En la ecuación de nuestro problema:

$x^2 + 2x = 35$ Pasamos todos los términos a la izquierda e igualamos a cero

$$x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$c = -35$$

Reemplacemos estos valores en las fórmulas para calcular $x_1\, y x_2$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4.1.(-35)}}{2.1} \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4.1.(-35)}}{2.1}$$

$$x_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 + 140)}}{2} \qquad x_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 + 140)}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2 + 12}{2} \qquad x_2 = \frac{-2 - 12}{2}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = -7$$

Las soluciones de la ecuación son dos $x_1 = 5$ y $x_2 = -7$ pero el problema pregunta por las longitudes de los lados del rectángulo y como una longitud no puede ser negativa, la segunda raíz se descarta y para este problema solo se considera $x_1 = 5$. Por lo tanto, las longitudes de los lados son:

$$base = x + 2m$$

$$5m + 2m = 7m$$

$$y \quad altura = 5m$$

Respuesta: los lados del rectángulo miden 7m y 5m.

En este video repasarás la manera de aplicar la fórmula resolvente, hace clic sobre la imagen.

ACTIVIDAD 1 OBLIGATORIA PARA ENTREGAR AL TUTOR

Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas.

$a)\ 2x^2 - 8x - 42 = 0$

$a = \cdots \quad b = \cdots \quad c = \cdots$

$x_1 = \cdots$

$x_2 = \cdots$

$b)\ x^2 + 4x = 0$

$a = \cdots b = \cdots c = \cdots$

$x_1 = \cdots$

$x_2 = \cdots$

$c)\ 4x^2 - 9 = 0$

$a = \cdots b = \cdots c = \cdots$

$x_1 = \cdots$

$x_2 = \cdots$

SEMANA 2

TIPOS DE RAÍCES DE LAS ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las raíces de una ecuación cuadrática siempre son dos. En algunos casos, como en los que vimos hasta ahora, esas raíces son números reales distintos, en otros las dos raíces son números reales iguales y en otros casos son dos números complejos.

Resolvamos estas ecuaciones para comprender mejor:

1) $2x^2 - 20x + 50 = 0$

$$a = 2 \qquad b = -20 \qquad c = 50$$

Apliquemos la fórmula resolvente:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x_1 = \frac{+20 + \sqrt{20^2 - 4.2.50}}{2.2} \qquad x_2 = \frac{+20 - \sqrt{20^2 - 42.50}}{2.2}$$

$$x_1 = \frac{+20 + \sqrt{400 - 400}}{4} \qquad x_2 = \frac{+20 - \sqrt{400 - 400}}{4}$$

$$x_1 = \frac{+20 + 0}{4} \qquad x_2 = \frac{+20 - 0}{4}$$

$$x_1 = 5 \qquad x_2 = 5$$

En este caso las raíces son números reales iguales.

2) $x^2 - 6x + 13 = 0$

$$a = 1$$

$$b = -6$$

$$c = 13$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a}$$

$$x_1 = \frac{+6 + \sqrt{6^2 - 4.1.13}}{2.1} \qquad x_2 = \frac{+6 - \sqrt{6^2 - 4.1.13}}{2.1}$$

$$x_1 = \frac{+6 + \sqrt{36 - 52}}{2} \qquad x_2 = \frac{+6 - \sqrt{36 - 52}}{2}$$

$$x_1 = \frac{+6 + \sqrt{-16}}{2} \qquad x_2 = \frac{+6 - \sqrt{-16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{+6 + 4i}{2} \qquad x_2 = \frac{+6 - 4i}{2}$$

$$x_1 = 3 + 2i \qquad x_2 = 3 - 2i$$

En este caso las raíces son números complejos.

La raíz cuadrada de un número negativo no tiene solución entre los números reales. Es por este motivo que se crean los números complejos.

Este tema lo estudiaremos en profundidad en el próximo módulo.

El tipo de raíces que se obtengan en una ecuación cuadrática depende del resultado de las operaciones que quedan dentro de la raíz $(b^2 - 4.a.c)$ que se llama **discriminante.**

$b^2 - 4.a.c > 0$	• las raíces son números reales distintos.
$b^2 - 4.a.c = 0$	• las raíces son números reales iguales.
$b^2 - 4.a.c < 0$	• las raíces son números complejos.

También podés ver el tema haciendo clic en el siguiente video:

ACTIVIDAD 2 OBLIGATORIA PARA ENTREGAR AL TUTOR

Sin resolverlas, utilizando el discriminante, determina cómo serán las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas:

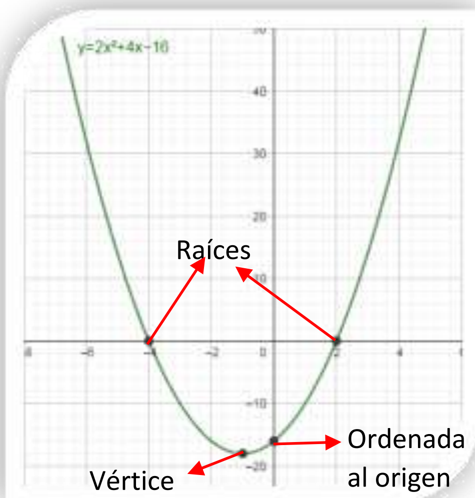
$a)\ x^2+2x+1=0$ $\qquad$ $b)\ x^2-x-2=0$ $\qquad$ $c) x^2+6x+10=0$

SEMANA 3

FUNCIÓN CUADRÁTICA

$f(x) = 2x^2 + 4x - 16$ es una función cuadrática porque la variable x está elevada al cuadrado.

Su gráfica recibe el nombre de parábola:



En la gráfica podemos distinguir:

Raíces: son dos (en algunos casos son coincidentes) ubicadas en el eje x. Las expresamos $x_1 = -4$ y $x_2 = 2$. Se pueden calcular usando la fórmula resolvente.

Ordenada al origen: es el punto donde la gráfica corta al eje y, escribimos y= -16.

Vértice: es el punto **mínimo o máximo**, donde la curva cambia de concavidad. Lo indicamos $(x_v, y_v) = (-1; -18)$

Dominio de la función: El dominio de la función cuadrática es el conjunto de los números reales.

$$Domf = R$$

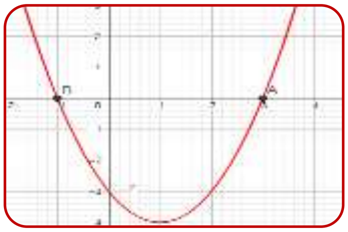
Imagen de la función: Varía de acuerdo a si la gráfica “abre” hacia arriba o hacia abajo.

$$Imf = [y_v; +\infty]\ si\ abre\ hacia\ arriba$$

$$ó\ \ Imf = \ [-\infty; y_v]\ si\ abre\ hacia\ abajo$$

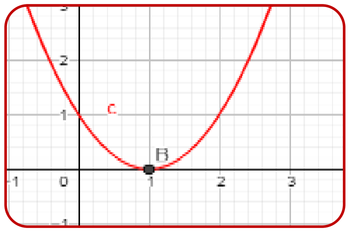
El siguiente video te muestra cómo graficar la función cuadrática y encontrar en la gráfica sus elementos.

LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA SEGÚN SUS RAÍCES



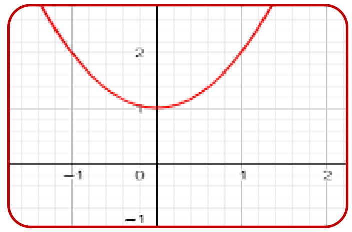
$b^2 - 4.a.c > 0$

las raíces son números reales distintos. La gráfica corta al eje x en dos puntos



$b^2 - 4.a.c = 0$

las raíces son números reales iguales. La gráfica corta al eje x en un punto.

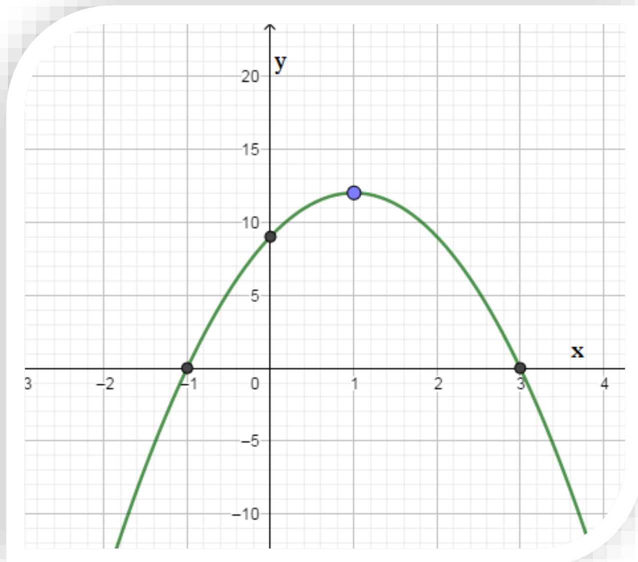


$b^2 - 4.a.c < 0$

las raíces son números complejos. La gráfica no corta al eje x.

ACTIVIDAD 3 OBLIGATORIA PARA ENTREGAR AL TUTOR

1) Observa la siguiente gráfica correspondiente a la función cuadrática $f(x) = -3x^2 + 6x + 9$:



¡Atención!

En este caso la gráfica de la función “abre para abajo”, esto ocurre cuando el coeficiente del término cuadrático es negativo.

a) Completa el cuadro con los datos pedidos:

vértice	raíces	ordenada al origen	Dominio de la función	Imagen de la función

b) ¿Esta función tiene máximo o mínimo? ¿Cuál es ese valor?

ACTIVIDADES DE INTEGRACIÓN

1. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas aplicando la fórmula resolvente:

$a)\ 3x - x^2 + 0{,}1 =$ $\qquad$ $b)\ x^2 + 4 = 0$

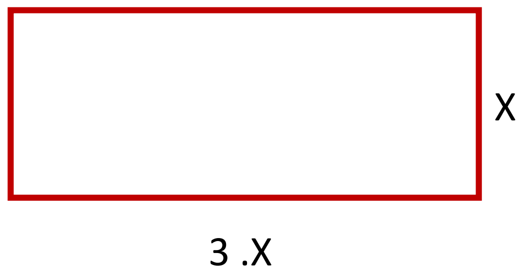
$c)\ \frac{-1}{9} + 2x - 9x^2 = 0$ $\qquad$ $d)\ 3x^2 - \frac{1}{3} = 0$

2. Grafica con GEOGEBRA las funciones del ejercicio anterior y comprueba si haz resuelto correctamente. Además, completa la tabla para cada función.

función	vértice	raíces	ordenada al origen	Dominio de la función	Imagen de la función
$y = 3x - x^2 + 0{,}1$					
$y = x^2 + 4$					
$y = \frac{-1}{9} + 2x - 9x^2$					
$y = 3x^2 - \frac{1}{3}$					

3. Un grupo de emprendedores de la ciudad de Victoria recibió del Gobierno Municipal un terreno para destinarlo a realizar ferias durante los fines de semana.

   El terreno tiene forma rectangular y como en una parte hay algo de monte nativo no pudieron medirlo exactamente, pero saben que uno de sus lados mide el triple del otro y que la superficie total es de $4800m^2$. Determina el largo y el ancho del terreno.



BIBLIOGRAFÍA

- Altman, Silvia y otros. Iniciación al álgebra y al estudio de funciones 2. Tinta Fresca. Buenos Aires 2012.
- Bocco, Mónica. Funciones elementales para construir modelos matemáticos. Ministerio de educación. Buenos aires. 2010.
- Kaczor, Pablo y otros. Matemática I. Santillana. Polimodal. Buenos Aires. 2007
- Laurito, Liliana y otros. Matemática Activa 9. Puerto de Palos. Buenos Aires 2001.
- Mérega, Herminia. Actividades de Matemática 9. Santillana. Buenos Aires. 2007.